ICARE

***

session 1999

EPREUVE DE MATHEMATIQUES 1

Filières MP/PC/PSI/PT

Durée : 4 heures

*****

Le sujet est constitué de deux problèmes et d' un exercice totalement indépendants entre eux .

EXERCICE

On considère la fonction f définie de la manière suivante :

f est impaire , 2π-périodique , et : $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$

1) Calculer les coefficients de Fourier réels de f , puis étudier la convergence de la série de Fourier de f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire les sommes suivantes :

$$R = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \qquad S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \qquad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$$

PROBLEME 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - x.\sin^2 t}}$.

1) Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale définissant $f(x)$ existe . Examiner en particulier l'existence de $f(1)$.

2) Montrer que f est de classe C^2 sur D , et expliciter ses dérivées f' et f" .

3) Montrer qu' il existe une suite de nombres réels $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$$\forall x \in]-1,1[\ , \ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n \quad .$$

Exprimer α_n en fonction de l'intégrale $W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2n} dt$.

4) On considère l' équation différentielle (E) : $(x^2 - x)y'' + (2x - 1)y' + \frac{1}{4}y = 0$.

a) Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de zéro . Préciser le rayon de convergence des séries entières obtenues .

b) Calculer $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sin t \cos t}{4(1 - x\sin^2 t)^{3/2}}\right]$, puis établir que f est solution de (E) sur $]-\infty,1[$.

En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.

5) Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(1 - x)$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$.

Vérifier que la famille (f , g) est libre , puis en déduire toutes les solutions de (E) sur $]0,1[$.

PROBLEME 2

Le but de ce problème est d'étudier la nature de la série $\sum u_n$ pour des suites (u_n) vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1) Soit u_n le terme général d'une série à termes réels strictement positifs . On suppose qu'il existe un entier naturel n_0 et une suite (v_n) à termes réels strictement positifs tels que :

$$\forall n \geq n_0 \quad . \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que :

$(\sum v_n$ converge $) \Rightarrow (\sum u_n$ converge $)$ et $(\sum u_n$ diverge $) \Rightarrow (\sum v_n$ diverge $)$.

2) Soit u_n le terme général d'une série à termes réels strictement positifs .

On suppose qu'il existe un réel β tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, et on considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel quelconque différent de β .

a) Donner un équivalent de la différence $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis à l'aide des résultats de la question 1) , établir les résultats suivants :

$$\beta > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \quad \text{et} \quad \beta < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge}$$

b) *exemples* :

Etudier la nature des séries $\sum \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)}$ et $\sum \frac{n.n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$ où $a > 0$.

3) Dans cette question , on cherche à étudier de plus près le cas $\beta = 1$, dans un cas particulier .
On considère une série $\sum u_n$ à termes réels strictement positifs et on suppose qu'il existe une suite (v_n) telle que :

i) la série $\sum v_n$ converge absolument

ii) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + v_n$

a) Montrer que les séries $\sum \frac{v_n}{n}$ et $\sum (v_n)^2$ sont convergentes .

b) On pose $a_n = \ln(n.u_n)$.

Montrer que la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est convergente .

En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \sim \frac{K}{n}$, puis conclure sur la nature de la série $\sum u_n$.

c) *exemple* : étudier la nature de la série $\sum \left[\frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)}\right]^2$.